1.1 세 개의 주사위를 던질 때, 세 주사위 중 적어도 한 개가 6의 눈이 나올 확률을 구하여라

A_i : i 번째 주사위에서 6이 나오는 사건

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c)$

$= (5/6)^3$

$1 - (5/6)^3 = 1 - \frac{125}{216} = 91/216$ ✓✓

1.2 1 부터 10 까지의 수가 하나씩 적힌 카드들 중에서 한 장을 랜덤하게 뽑았을 때, 뽑힌카드가 짝수임을 알고 있는 경우에 뽑힌 카드의 숫자가 5 이상의 숫자일 확률을 구하여라.

A : 짝수를 뽑은 사건

B : 5 이상의 수를 뽑은 사건

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/10}{5/10} = 3/5$

1.3. 한 공장에서 기계 A, B, C를 사용하여 같은 종류의 스프링을 생산하고 있으며 기계 A, B, C 에서 불량품이 생산될 확률은 각각 1%, 2%, 3% 인 것으로 알려져 있다. 또한 이 공장에서 생산되는 전체 스프링의 30% 기계 A에서, 50% 기계 B에서, 20% 기계 C에서 만들어진다고 한다.

(a) 어느날 생산된 전체 스프링 중 하나를 랜덤하게 선택했을 때, 그것이 불량품일 확률을 구하여라.

(b) 어느날 생산된 전체 스프링 중 하나를 랜덤하게 선택했을 때, 그것이 불량품이 없다. 이러한 조건 하에서 그것이 기계 B에서 만들어졌을 조건부 확률을 구하여라.

A : 기계 A를 선택하는 사건

B : 기계 B를 〃

C : 기계 C를 〃

D : 불량품(defect)가 생산되는 사건

$P(A \cap D) = 0.3 \times 0.01 = 3 \times 10^{-3}$

$P(B \cap D) = 0.5 \times 0.02 = 1 \times 10^{-2}$

$P(C \cap D) = 0.2 \times 0.03 = 6 \times 10^{-3}$

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D + C)$

$= 1.9 \times 10^{-2}$ ✓✓

$P(B|D) = P(B \cap D) / P(D) = 1/1.9 = 10/19$ ✓✓

1.4. 한 기기의 내부에 부품 3개가 병렬로 연결되어 있어 적어도 하나가 작동을 하면 이 기기는 정상적으로 움직인다고 한다. 각 부품이 고장나는 사건은 독립적이고 각 부품이 고장날 확률이 0.05 라고 할 때, 이 기기가 정상적으로 움직일 확률을 구하여라.

A_i : i 번째 부품이 고장 나는 사건

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (5/100)^3 = (1/20)^3 = \frac{1}{8} \cdot 10^{-3} = 1.25 \times 10^{-4}$

1.5 양의 실수 전체의 부분집합 A에 대하여

$$P(A) = \int_A e^{-x} dx$$

로 확률이 정의되었을 때, $A_k = \left\{ x : 2 - \frac{1}{k} < x \le 3 \right\}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 에 대하여 다음 사건과 확률을 구하여라.

(a) $\lim_{k \to \infty} A_k$ 와 $P(\lim_{k \to \infty} A_k)$

(b) $P(A_k)$ 와 $\lim_{k \to \infty} P(A_k)$

(a) $\lim_{k \to \infty} A_k = \lim_{k \to \infty} \left\{ x : 2 - \frac{1}{k} < x \le 3 \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = [2, 3]$

$= \{ x : 2 \le x \le 3 \}$ ✓✓

$P(\lim_{k \to \infty} A_k) = \int_2^3 e^{-x} dx = e^{-2} - e^{-3}$ ✓✓

(b) $P(A_k) = \int_{2-k^{-1}}^{3} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_{2-k^{-1}}^{3}$

$= e^{-2-k^{-1}} - e^{-3}$ ✓✓

$\lim_{k \to \infty} P(A_k) = \lim_{k \to \infty} e^{-2-k^{-1}} - e^{-3} = e^{-2} - e^{-3}$ ✓✓

1.6. 확률 변수 X의 누적분포함수가

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/8 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$C_k = \left\{ x : \frac{1}{k} \le x \le 2 - \frac{1}{k} \right\}$

$D_k = \left\{ x : 2 - 1/k < x < 2 + 1/k \right\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$

일때 다음 사건과 확률을 구하여라

(a) $\lim_{k \to \infty} C_k$ 와 $P(X \in \lim_{k \to \infty} C_k)$

(b) $\lim_{k \to \infty} D_k$ 와 $P(X \in \lim_{k \to \infty} D_k)$

(a) $\lim_{k \to \infty} C_k = \{ x : 0 < x < 2 \}$ ✓✓

$P(X \in \lim_{k \to \infty} C_k) = P(X < 2) - P(X \le 0)$

$= 2^2/8 - 0 = 1/2$ ✓✓

(b) $\lim_{k \to \infty} D_k = \{ x : 2 \le x \le 2 \}$ ✓✓

$= P(X \le 2) - P(X < 2)$

$= 1 - 1/2 = 1/2$ ✓✓

1.7. 확률변수 X의 누적분포가

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/4+1/4 & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$C_k=\{x:\ 1/k<x<2-1/k\}\quad (k=1,2,\cdots)$$

$$D_k=\{x:\ -1/k<x<1+1/k\}\quad (k=1,2,\cdots)$$

일 때 다음 사건과 확률을 구하여라.

(a) $\lim_{k\to\infty} C_k$ 와 $P(X\in\lim_{k\to\infty} C_k)$

(b) $\lim_{k\to\infty} D_k$ 와 $P(X\in\lim_{k\to\infty} D_k)$

(a) $\lim_{k\to\infty} C_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k=(0,2)$ ✓✓

$P(X\in\lim_{k\to\infty} C_k)=P(X<2)-P(X\le 0)$
$=(2/4+1/4)-1/4=1/2$ ✓✓

(b) $\lim_{k\to\infty} D_k=\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k=[0,1]$ ✓✓

$P(X\in\lim_{k\to\infty} D_k)=P(X\le 1)-P(X<0)$
$=(1/4+1/4)-0$
$=1/2$ ✓✓

1.8. 확률변수 X의 누적분포함수가 다음과 같은 경우에 X의 확률밀도함수를 구하여라.

(a) $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1-(1/2)^k & k\le x<k+1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$

(b) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

(c) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-x^2} & x\ge 0\end{cases}$

(a) $P(X=x)=P(X\le x)-P(X\le x-1)$
$=\left(1-(1/2)^x\right)-\left(1-(1/2)^{x-1}\right)$
$=(1/2)^{x-1}(1-1/2)\quad x=1,2,\cdots$ ✓✓

(b) $F'(x)=\frac{\partial}{\partial x}x^2=2x\,I_{[0,1]}(x)$ ✓✓

(c) $F'(x)=\frac{\partial}{\partial x}(1-e^{-x^2})=2x\cdot e^{-x^2}I_{[0,+\infty)}(x)$ ✓✓

(b)·(c)'s pdf can be calculated by differentiating $F(x)$ on $I:=[a,b]$ because $F(x)$ is continuous on I if there's a "jump", $P(X=x)=P(X\le x)-P(X<x)$.

1.9. 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같은 경우에 상수 c의 값을 구하고 X의 누적분포함수를 구하여라.

(a) $f(x)=c(2/3)^x,\quad x=0,1,2,\cdots$

(b) $f(x)=cx^2(1-x)I_{[0,1]}(x)$

(c) $f(x)=ce^{-2|x|},\quad -\infty<x<+\infty$

(a) $\sum_{x=0}^{\infty} f(x)=1\ \therefore\ c\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=c\cdot\frac{1}{1/3}=3c=1\ \therefore\ c=1/3$

$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x=0}^{x} f(x)=\sum_{x=0}^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot c=c\cdot\frac{1-(2/3)^{x+1}}{1-2/3}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\quad x=0,1,2\cdots$

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 cx^2(1-x)\,dx=1$

$\therefore\int_0^1 cx^2-cx^3=c\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=c\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=c\cdot\frac{1}{12}=1\ \therefore\ c=12$

$F(x)=\int_0^x c\cdot x^2-cx^3\,dx=c\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^x=4x^3-3x^4\quad 0\le x\le 1$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-2|x|}\,dx=2\int_0^{+\infty} ce^{-2x}\,dx=2\left[-\frac{c}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}=\left[-ce^{-2x}\right]_0^{\infty}$
$=0-(-c\cdot 1)\ \therefore c=1$ ✓✓

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} ce^{-2|x|}\,dx$

if $x\ge 0$, $F(x)=\frac{1}{2}+\int_0^x e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^x=1-\frac{1}{2}e^{-2x}$

if $x<0$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{-2|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{x} e^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$F(x):=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2x} & \text{if } -\infty<x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-2x} & \text{if } 0\le x<+\infty\end{cases}$$ ✓✓

1.10 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같은 경우에 X의 기대값이 존재하기 위한, 즉 $E[X]<+\infty$ 이기 위한 양수 α 값의 범위를 구하여라.

$$f(x)=\alpha x^{-\alpha-1}I_{(1,\infty)}(x)$$

$$E[X]=\int_1^{\infty} x\cdot\alpha x^{-\alpha-1}\,dx=\int_1^{\infty}\alpha x^{-\alpha}\,dx=\left[\frac{\alpha}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_1^{\infty}$$

$$=\frac{\alpha}{-\alpha+1}(\infty)^{-\alpha+1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}<\infty$$

$$\therefore\ \alpha>1$$ ✓✓

☆ 1. 11

(a) 확률변수 X 와 임의의 양수 k에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라

$$k\,P(X>k) \le E(X\cdot I(X>k)) \quad (k>0)$$

$$P(X>k) = \int_k^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X>k)\cdot f(x)\,dx = E[I(X>k)]$$

$$E[kI(X>k)] \le E[X\cdot I(X>k)] \quad \text{(because of the indicator function, for all } X<k,\ k\cdot I(X)=X\cdot I(X)\text{)}$$

$$\Rightarrow\ k\cdot E[I(X>k)] \le E[X\cdot I(X<k)]$$

$$\Rightarrow\ k\cdot P(X>k) \le E[X\cdot I(X<k)]$$

(b) 0 또는 양수의 값을 갖는 연속형 확률변수 X의 기대값이 존재할 때, 즉 $E(X)<+\infty$ 일 때 다음이 성립함을 보여라.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot P(X>x) = 0$$

$$x\,P(X>x) = x\,E[I(X>x)] = E[x\cdot I(X>x)]$$

$$\le E[X\cdot I(X>x)]$$

$$\lim_{x\to\infty} E[x\cdot I(X>x)] = 0$$

$$\therefore\ 0 \le \lim_{x\to\infty} x\cdot P(X>x) \le \lim_{x\to\infty} E[x\cdot I(X>x)] = 0$$

$$E[X] = \lim_{K\to\infty}\int_0^K x\cdot f(x)\,dx < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{K\to\infty}\int_K^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = \lim_{K\to\infty} E[X\,I(X>K)] = 0$$

(c) 0 또는 양수의 값을 갖는 연속형 확률변수 X의 기대값이 존재하고 그 누적분포함수 F가 모든 점에서 미분가능할 때 다음이 성립함을 보여라.

$$EX = \int_0^{+\infty} (1-F(x))\,dx$$

(풀이) $$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot I_{[0,\infty)}(x)\cdot f(x)\cdot dx = \int_0^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

$\int u'v = uv - \int uv'$ $\quad v=x \quad u'=f(x)$ $\quad v'=1 \quad u=F(x)$

$$= [x\,F(x)]_0^{\infty} - \int F(x)$$

$$= [x\cdot P(X<x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(x)$$

$$= [x\,(1-P(X>x))]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(x)$$

$$= \lim_{K\to\infty}[x\cdot 1 - x\cdot P(X>x)]_0^{K} - \int_0^{\infty} F(x)$$

$$= \lim_{K\to\infty}[x]_0^{\infty} - \lim_{K\to\infty} x\cdot P(X>x) - \int_0^{\infty} F(x)$$

($\lim_{K\to\infty}[x]_0^{\infty} = \infty$, $\lim_{K\to\infty} x\cdot P(X>x) \to 0$)

$$= \int_0^{\infty} 1 - F(x)\,dx$$

1.18 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같은 경우에 (a), (b)의 값을 구하여라.

$$f(x) = \frac{3}{9}(2-x)(1+x)\,I_{[-1,+2]}(x)$$

(a) $E[X]$, $Var(X)$ (b) $E[2X+3]$, $Var(2X+3)$

$$E[X] = \int_{-1}^{+2} x\cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{+2} x\cdot\frac{3}{9}(2+x-x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{9}\int_{-1}^{+2} 2x + x^2 - x^3\,dx$$

$$= \frac{3}{9}\left[x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{+2}$$

$$= \frac{3}{9}\left[\left\{4+\frac{8}{3}-4\right\} - \left\{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right\}\right]$$

$$= \frac{3}{9}\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\right) = \frac{3}{9}\left(\frac{32-5}{12}\right) = \frac{\overset{1}{3}\cdot 27}{\underset{1}{9}\cdot\underset{4}{12}} = \frac{1}{2}$$ ✓✓

$$E[X^2] = \int_{-1}^{+2} x^2\cdot f(x)\,dx = \frac{3}{9}\int_{-1}^{+2} x^2(2+x-x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{9}\int_{-1}^{+2} 2x^2 + x^3 - x^4\,dx$$

$$= \frac{3}{9}\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{3}{9}\left[\left\{\frac{16}{3}+4-\frac{32}{5}\right\} - \left\{-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right\}\right]$$

$$= \frac{3}{9}\left[\frac{80+60-96}{15} - \frac{-40+15+12}{60}\right]$$

$$= \frac{3}{9}\left[\frac{44}{15} + \frac{13}{60}\right] = \frac{\overset{1}{3}}{\underset{1}{9}}\left[\frac{176+13}{\underset{30}{60}}\right] = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

$80+60-96 = 44$ $\quad -40+15+12 = -13$ $\quad 176+13 = 189 = 21$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{28-10}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$ ✓✓

(b) $E[2X+3] = 2E[X]+3 = 4$ ✓✓

$Var(2X+3) = 4\,Var(X) = \frac{9}{5}$ ✓✓

1.13 확률변수 X에 대하여 $E[X^2] < +\infty$ 일 때 실수 a에 대하여 $E[(X-a)^2] = Var(X) + (E[X]-a)^2$ 임을 밝히고, 이로부터 $E[(X-a)^2]$를 최소로 하는 실수 a의 값은 $E[X]$임을 밝혀라

$$E[(X-a)^2] = E[X^2 - 2Xa + a^2]$$
$$= E[X^2] - 2aE[X] + a^2$$
$$= E[X^2] + E[X]^2 - E[X]^2 - 2aE[X] + a^2$$
$$= (E[X^2] - E[X]^2) + (E[X]^2 - 2aE[X] + a^2)$$
$$= (E[X^2] - E[X]^2) + (E[X] - a)^2$$
$$= Var(X) + (E[X]-a)^2$$

$Var(X) \geq 0$ and

$\therefore E[(X-a)^2] \geq 0 + (E[X]-a)^2$

$\therefore E[X] = \underset{a \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, E[(X-a)^2]$

1.14. 연속형 확률변수 X에 대하여 $P(X \leq m) = 1/2$ 이 성립하는 m이 유일하게 있는 경우에 m을 X의 분포의 중앙값이라고 한다. 이와 같이 중앙값이 유일하게 존재하고 $E(|X|) < +\infty$ 인 연속형 확률변수 X에 대하여

$$E(|X-a|) = E(|X-m|) + 2\int_m^a (a-x) f(x)\,dx$$

임을 밝히고, 이로부터 $E[|X-a|]$을 최소화하는 실수 a의 값은 중앙값 m임을 밝혀라. (참고: $a > m$ 일 때 $|x-a| - |x-m| = (a-m)\{I(x \leq m) - I(x > m)\} + 2(a-x)I(m < x \leq a)$)

(풀이) $E(|X-a|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| \cdot f(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|x-m| + (a-m)\left\{ I(x \leq m) - I(x > m) + 2(a-x) I(m < x \leq a) \right\} \right] \cdot f(x)\,dx$$

$$= E[|X-m|] + \int_{-\infty}^{m} (a-m)\cdot f(x)\,dx - \int_{m}^{\infty} (a-m)\cdot f(x)\,dx + \int_m^a 2(a-x)\cdot f(x)\,dx$$

$(= 0)$

$* \int_{-\infty}^{m} f(x) = 1/2 \quad 1 - \int_{-\infty}^{m} f(x) = \int_m^{+\infty} f(x) = 1 - 1/2 = 1/2$

$$= E[|X-m|] + \int_m^a 2(a-x) f(x)\,dx \quad \square$$

* note $2\int_m^a (a-x) f(x)\,dx \geq 0 \quad \because (a-x) \geq 0$ and $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [m, a]$

$\therefore E[|X-a|] \geq E[|X-m|]$

$\therefore \underset{a \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, E[|X-a|] = m$

1.15 X의 확률밀도함수가 다음과 같은 경우에 X의 적률생성함수를 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x}, & x < 0 \\ e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$$

$M_X(t) = E[e^{tX}]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} \cdot \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{(t-2)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t+1} e^{(t+1)x} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{2-t} e^{(2-t)\cdot x} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}(t+1)^{-1} + (2-t)^{-1} \qquad -1 < t < 2$$ ✓✓

1.16 X의 확률밀도함수가 다음과 같을 때 X의 적률생성함수와 평균, 분산을 구하여라.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x} & \text{if } x \geq 0 \\ \frac{1}{2} e^{x} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2} e^{-x}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{tx} \cdot \frac{1}{2} e^{x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x\cdot(1-t)}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{x\cdot(1+t)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1-t} e^{-x} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t} e^{x} \right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}(1-t)^{-1} + \frac{1}{2}(1+t)^{-1} \qquad |t| < 1$$

$$M_X'(t) = \frac{1}{2}(1-t)^{-2}\cdot(-1)\cdot(-1) + \frac{1}{2}(1+t)^{-2}\cdot(-1)\cdot(1)$$
$$= \frac{1}{2}(1-t)^{-2} - \frac{1}{2}(1+t)^{-2}$$

$$M_X'(t=0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$M_X''(t) = \frac{1}{2}(1-t)^{-3}(-1)(-2) - \frac{1}{2}(1-t)^{-3}(-2)\cdot(1)$$
$$= (1-t)^{-3} + (1-t)^{-3}$$

$$M_X''(t=0) = 2$$ ✓✓

$E[X] = M_X'(t=0) = 0$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = M_X''(t=0) - M_X'(t=0)^2$
$= 2 - 0^2 = 2$ ✓✓

[Textbook Solution]

(…)

$cgf(t) = -\log(1-t^2) = t^2 + \frac{1}{2}(t^2)^2 + \cdots, \quad -1 < t < 1$

$E[X] = 0$, $Var(X) = 2$

1.17 확률변수 X의 적률생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고

$E[X^{2r}] = (2r)!/2^r r!$, $r = 1, 2, 3, \cdots$

$E[X^{2r-1}] = 0$, $r = 1, 2, 3, \cdots$

일 때 X의 적률생성함수를 구하여라

$$M_X(t) = 1 + \frac{E[X]}{1!}t + \frac{E[X^2]}{2!}t^2 + \frac{E[X^3]}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= 1 + 0 + \frac{2!}{2^1 \cdot 1!}t^2 + \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^r r!} \cdot \frac{1}{(2r)!} \cdot t^{(2r)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r r!} t^{(2r)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^r$$

$$= \exp\left\{t^2/2\right\} \quad , \ -\infty < t < +\infty$$

1.18 확률변수 X의 적률생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고, k차 적률이

$$m_k = \frac{1}{3}k!\left\{2 + (-1/2)^k\right\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

로 주어지는 경우에 다음을 구하여라.

(a) X의 확률밀도함수

(b) X의 r ($r = 1, 2, 3, \cdots$) 차 누율

(a) $M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!} t^k$

$m_0 = 1$ $\therefore M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}k!\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}}{k!} t^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\} \cdot t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}t^k + \frac{1}{3}\left(-\frac{t}{2}\right)^k$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+t/2} \quad , \ |t| < 1$$

$$= \frac{2}{3}(1-t)^{-1} + \frac{2}{3}(2+t)^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t}\right\} \ \checkmark\checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{2x} & \text{if } x < 0 \\ \frac{2}{3}e^{-x} & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad \therefore f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{2x} & \text{if } x < 0 \ \checkmark\checkmark \\ \frac{2}{3}e^{-x} & \text{if } x \geq 0 \ \checkmark\checkmark \end{cases}$$

$$E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3}e^{2x} e^{tx} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{3}e^{-x} \cdot e^{tx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3}e^{(2+t)x} dx + \int_{0}^{-\infty} \frac{2}{3}e^{-(-t-b)x} dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2+t}e^{(2+t)x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{(-t-b)}e^{-(-t-b)x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{(2+t)^{-1}\right\} + \frac{2}{3}(-t-b) \quad a = 2, \ b = -1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \left[\frac{1}{3}e^{2x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{2}{3}e^{-x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$a + t > 0$, $-t - b > 0$

$-a < t < -b \Rightarrow (-2 < t < 1)$

(b) $\log M_X(t) = \log \frac{2}{3}\left\{(1-t)^{-1} + (2+t)^{-1}\right\}$

$$C_X(t) = \log \frac{2}{3}\left\{(1-t)^{-1} + (2+t)^{-1}\right\}$$

$$= \log \frac{2}{3}\left\{\frac{2+t+1-t}{(1-t)(2+t)}\right\}$$

$$= \log \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(1-t)(2+t)} = \log \frac{2}{(1-t)(2+t)}$$

$$= \log 2 - \log(1-t) - \log(2+t)$$

$$C_X'(t) = (1-t)^{-1} - (2+t)^{-1}$$

$$C_X''(t) = (1-t)^{-2} + (2+t)^{-2}$$

$$\vdots$$

$$C_X^{(k)}(t) = \frac{k!}{(k-1)!}(1-t)^{-k} + (-1)^k \frac{k!}{(k-1)!} \cdot (2+t)^{-k}$$

$$C_1 = (1-0)^{-1} - (2+0)^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = (1-0)^{-2} + (2+0)^{-2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$C_X^{(k)}(t=0) = k!(1-0)^{-k} + (-1)^k \cdot k! \cdot (2+0)^{-k}$$

$$= k!\left\{1 + (-1/2)^k\right\}$$

$$= (k-1)!\left\{1 + (-1/2)^k\right\}$$

[Textbook Solution]

$$cgf_X(t) = \log mgf_X(t) = -\log(1-t)(1+t/2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1 + (-1/2)^r}{r} t^r \quad , \ |t| < 1$$

따라서 r차 누율은 $C_r = \left\{1 + (-1/2)^r\right\}(r-1)! \quad (r = 1, 2, \cdots)$

1.19 표준화된 확률변수 $Z=(X-\mu)/\sigma$ 의 적률 $m_r(z)$ 와 누율 $C_r(z)$ 의 관계로부터

$C_3(z)=m_3(z)$, $C_4(z)=m_4(z)-3$

임을 밝혀라. Z의 3차 누율 $C_3(z)=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$ 과 4차 누율 $C_4(z)=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]-3$ 을 각각 X의 왜도(Skewness)와 첨예도(Kurtosis)라고 한다.

$$M_z(t)=E[e^{tz}]=E\left[\exp\{t(X-\mu)/\sigma\}\right]$$
$$=E[\exp\{tX/\sigma\}/\exp\{t\mu/\sigma\}]$$
$$=(\exp\{t\mu/\sigma\}^{-1})\,E[\exp\{tX/\sigma\}]$$

$$M_z^{(3)}(t)=\frac{\partial^3}{\partial t^3}E[e^{tz}]dz=\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tz}f(z)dz=\int_{-\infty}^{+\infty}z^3e^{tz}\cdot f(z)dz$$

$C_z(t)=\log M_z(t)$

$C_z'(t)=M_z'(t)/M_z(t)$

$E[z]=M_z'(t=0)=C_z'(t)=0$

$$Var(z)=M_z''(t=0)-M_z'(t=0)^2=M_z''(t=0)-0^2$$
$$=C_z''(t=0) \quad \therefore M_z''(t=0)=C_z''(t=0)$$

$$C_z'''(t)=\frac{\partial^3}{\partial t^3}\log M_z(t)$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{M_z'(t)}{M_z(t)}=\frac{M_z''(t)}{M_z(t)}-\frac{M_z'(t)^2}{M_z(t)^2}=\frac{M_z''(t)M_z(t)-M_z'(t)^2}{M_z(t)^2}$$
$$=\left(M_z''(t)\cdot M_z(t)-M_z'(t)^2\right)\left(M_z(t)\right)^{-2}$$

$$C_z'''(t=0)=\left(M_z''(0)\cdot M_z(0)-M_z'(0)^2\right)\left(M_z(0)\right)^{-2}$$
$$=(1\cdot1-0^2)(1)^{-2}=1$$

$C_z(t)=\log M_z(t)$

$M_z(t)=\exp\{C_z(t)\}$

} 적률과 누율의 관계를 이용하는 것이 key

$$M_z'(t)=C_z'(t)\exp\{C_z(t)\}$$
$$M_z''(t)=C_z''(t)\exp\{C_z(t)\}+\left[C_z'(t)\right]^2\exp\{C_z(t)\}$$
$$M_z'''(t)=\left[C_z'''(t)+C_z''C_z'(t)+2C_z''(t)\cdot C_z'(t)\right]\exp\{C_z(t)\}$$

$M_z'''(t=0)=[1+1\cdot0+2\cdot1\cdot0]\exp\{0\}$

$=1$ $\quad\therefore M_z'''(t=0)=C_z'''(t=0)$

$\therefore M_z'''(t=0)=C_z'''(t=0)$

$$C_z^{(4)}(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(M_z''(t)\cdot M_z(t)-M_z'(t)^2\right)\left(M_z(t)\right)^{-2}$$
$$=\left[M_z'''(t)\cdot M_z(t)+M_z''(t)\cdot M_z'(t)-2M_z''(t)M_z'(t)\right]\left(M_z(t)\right)^{-2}$$
$$+\left[M_z''(t)\cdot M_z(t)-M_z'(t)^2\right]\left(M_z(t)\right)^{-3}\cdot(-2)\cdot M_z'(t)$$

$$C_z^{(4)}(t=0)=\left[1\cdot1+1\cdot0-2\cdot1\cdot0\right](1)^{-2}+\left[1\cdot1-0^2\right](1)^{-3}(-2)\cdot(0)$$
$=1$

$$M_z'''(t)=\left[C_z'''(t)+C_z''C_z'(t)+2C_z''(t)\cdot C_z'(t)\right]\exp\{C_z(t)\}$$

$$M_z^{(4)}(t)=\left[C_z^{(4)}(t)+C_z'''(t)C_z'(t)+C_z''(t)^2+2C_z'''(t)C_z'(t)+2C_z''(t)^2\right]\exp\{C_z(t)\}$$
$$+\left[C_z'''(t)C_z'(t)+C_z''(t)C_z'(t)^2+2C_z''(t)C_z'(t)^2\right]\exp\{C_z(t)\}$$

$C_z(0)=0$ $\quad C_z'(0)=0$ $\quad C_z''(0)=1$ $\quad C_z'''(0)=1$ $\quad C_z^{(4)}(0)=1$

$$M_z^{(4)}(t=0)=[1+0+1^2+2\cdot0+2\cdot1^2]\cdot1+$$
$$[0+0+0]\cdot1$$
$$=4$$

$\therefore M_z^{(4)}-3=C_z^{(4)}$ Q.E.D.

[Textbook Solution]

$m_1(z)=E[z]=0$, $m_2(z)=E[z^2]=Var[z]=1$

$$\log\left(1+\underbrace{\frac{1}{2!}t^2+\frac{m_3}{3!}t^3+\frac{m_4}{4!}t^4+\cdots}_{=A}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r}{r!}t^r,\ |t|<h\ (\exists h>0)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r}{r!}t^r=A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3+\cdots,\ A\equiv\frac{1}{2!}t^2+\frac{m_3}{3!}t^3+\frac{m_4}{4!}t^4+\cdots$$

$*\ \log(1+A)=A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3-\cdots$ $\quad\therefore C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=m_3,\ C_4=m_4-4!\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$=m_4-3$

1.20 표준화된 확률변수 $Z = (X-\mu)/\sigma$ 의 누율생성함수와 X의 누율생성함수의 관계로부터 $Z=(X-\mu)/\sigma$ 의 누율과 X의 누율 사이에 다음 관계가 성립하는 것을 밝혀라.

$$C_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = C_r(X)/\sigma^r \quad (r = 3, 4, \cdots)$$

$$C_r(z) = \frac{d^r}{dt^r} C_z(t) = \frac{d^r}{dt^r} \log E[e^{tz}] = \frac{d^r}{dt^r} \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \cdot f(z)\, dz$$

$$M_z(t) = 1 + m_1 t + \frac{m_2}{2!}t^2 + \frac{m_3}{3!}t^3, \quad m_r = \frac{d^r}{dt^r} E[e^{tz}]$$
$$C_z(t) = \log(M_z(t)) = \log\left(1 + m_1 t + \frac{m_2}{2!}t^2 + \cdots\right)$$
$$= 1 - A + \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{3}A^3$$

$$M_x(t) = 1 + m_1' t + \frac{m_2'}{2!}t^2 + \frac{m_3'}{3!}t^3 + \cdots \quad m_r' = \frac{d^r}{dt^r} E[e^{tx}]$$
$$C_x(t) = \log(M_x(t)) = \log\left(1 + m_1' t + \frac{m_2'}{2!}t^2 + \cdots\right)$$
$$= 1 - A' + \tfrac{1}{2}A'^2 - \tfrac{1}{3}A'^3$$

$$m_r = E[z^r] \quad m_r' = E[x^r] \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_r}{r!} t^r$$
$$= E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^r\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma^r} E[(X-\mu)^r]$$

$$C_z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_r}{r!} t^r$$

$$C_r(z) = \frac{d^r}{dt^r} C_z(t) = \frac{d^r}{dt^r} \log E[e^{tz}] = \frac{d^r}{dt^r} \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \cdot f(z)\, dz$$
$$= \frac{d^r}{dt^r} \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x-\mu)/\sigma} \cdot f(z)\, dz$$

1.21 확률변수 x의 적률생성함수가

$$M(t) = (1-t)^{-3}, \quad t < 1$$

인 경우에 연습문제 (1.19)에서 정의된 X의 왜도(skewness)와 첨예도(Kurtosis)를 구하여라.

$$C_3(x) = M_3(x), \quad C_4(x) = M_4(x) - 3$$

$M'(t) = 3(1-t)^{-4}$ $M''(t) = 12(1-t)^{-5}$ $M^{(3)}(t) = 60(1-t)^{-6}$ $M^{(4)}(t) = 360(1-t)^{-7}$

$M'(t=0) = 3$ $M''(t=0) = 12$ $M^{(3)}(t=0) = 60$ $M^{4}(t=0) = 360$

$\therefore C_3(x) = 60 \quad C_4(x) = 357$

1.22 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같은 경우에 연습문제 (1.19) 에서 정의된 X의 왜도와 첨예도를 구하여라.

(a) $f(x) = e^{-x} I_{(0,+\infty)}(x)$

(b) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$

(a) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(1-t)x} dx$

$= \left[-\frac{1}{1-t} e^{-(1-t)x} \right]_0^{\infty} = (1-t)^{-1}, \quad t < 1$

$M_X'(t) = (1-t)^{-2}$
$M_X''(t) = 2(1-t)^{-3}$
$M_X^{(3)}(t) = 3!(1-t)^{-4}$
$M_X^{(4)}(t) = 4!(1-t)^{-5}$

$\therefore \ m_3 = 6, \ m_4 = 24$
$C_3 = 6, \ C_4 = 21$

(b) $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(1-t)x} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{(1+t)x} dx$

$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1-t} e^{-(1-t)x} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+t} e^{(1+t)x} \right]_{-\infty}^{0}$

$= \frac{1}{2}(1-t)^{-1} + \frac{1}{2}(1+t)^{-1}$

$M_X'(t) = \frac{1}{2}\left[(1-t)^{-2} - (1+t)^{-2} \right]$
$M_X''(t) = \frac{1}{2}\left[2!(1-t)^{-3} + 2!(1-t)^{-3} \right]$
$M_X^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\left[3!(1-t)^{-4} - 3!(1-t)^{-4} \right]$
$M_X^{(4)}(t) = \frac{1}{2}\left[4!(1-t)^{-5} + 4!(1-t)^{-5} \right]$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$m_3 = 0, \ m_4 = 24$
$C_3 = 0, \ C_4 = 21$

1.23 양수의 값을 갖는 확률변수 X에 대하여 다음 괄호 안에 올바른 부등호 기호를 써 넣어라.

(a) $E(-\log X) \quad (\geq) \quad -\log EX$

(b) $E[X^r] \quad (\geq) \quad (E[X])^r \quad (0 < r < 1)$

1.24. 확률변수 X의 적률생성함수 $mgf_X(t)$가 $-h < x < h \ (h > 0)$ 에서 존재할 때 다음이 성립함을 보여라.

(a) $P(X \geq a) \leq e^{-at} mgf_X(t) \quad \forall t : 0 \leq t < h$

(b) $P(X \leq a) \leq e^{-at} mgf_X(t) \quad \forall t : -h < t \leq 0$

(a) $P(X \geq a) = E[I_{[a,+\infty)}(x)] \quad M_X(t) = E[e^{tX}] \quad e^{-at} M_X(t) = E[e^{(X-a)t}]$

$I_{[a,+\infty)}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq a \\ 0 & \text{if } x < a \end{cases} \qquad e^{(x-a)t} := \begin{cases} e^{(x-a)t} \geq 1 & \forall x \geq a \\ e^{(x-a)t} \geq 0 & \forall x < a \end{cases}$

$\therefore \ I_{[a,+\infty)}(x) \leq e^{(x-a)t} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x-a)t \geq 0 \quad (x \geq a)$
$(x-a)t \leq 0 \quad (x < a)$

$\therefore \ E[I_{[a,+\infty)}(x)] \leq E[e^{(x-a)t}]$

(b) $P(X \leq a) = E[I_{(-\infty,a]}(x)] \quad M_X(t) = E[e^{tX}] \quad e^{-at} M_X(t) = E[e^{(x-a)t}]$

$I_{(-\infty,a]}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x > a \\ 1 & \text{if } x \leq a \end{cases} \qquad e^{(x-a)t} := \begin{cases} e^{(x-a)t} \geq 0 & \forall x \geq a \\ e^{(x-a)t} \geq 1 & \forall x < a \end{cases}$

$\therefore \ I_{(-\infty,a]}(x) \leq e^{(x-a)t} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \ E[I_{(-\infty,a]}(x)] \leq E[e^{(x-a)t}] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1. 25 확률변수 X 의 적률생성함수 $mgf_X(t)$가 모든 실수 t에 대하여 존재하고

$$mgf_X(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}, \quad t \neq 0, \quad mgf_X(0) = 1$$

일 때 $P(-1 < X < 1) = 1$ 임을 밝혀라.

$P(X \leq -1) \leq e^t mgf_X(t) = \frac{e^{2t} - 1}{2t}$, $\forall t < 0$: let $t \to -\infty$

$P(X \geq 1) \leq e^{-t} mgf_X(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{2t}$ $\forall t > 0$: let $t \to +\infty$