9.1. 베르누이분포 Bernoulli(p), $0 \le p \le 1$ 에서의 랜덤표본 $X = (X_1, \cdots, X_n)^t$ $(n=8)$ 을 이용하여 다음 가설을 검정하려고 한다.

$$H_0 : p = 1/2 \quad \text{vs} \quad H_1 : p = 3/4$$

(a) 다음의 베이지안 평균오류확률을 최소로 하는 베이즈 검정 ϕ^{π} 을 구하여라.

$$\pi_0 E_{p_0}\phi(X) + \pi_1 E_{p_1}[1-\phi(X)]$$

$(\pi_0 + \pi_1 = 1,\ \pi_0 > 0,\ \pi_1 > 0)\ (p_0 = 1/2,\ p_1 = 3/4)$

(b) 위의 가설을 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검정하려고 할 때 최강력검정을 구하여라.

(c) (b)의 검정의 $p = 3/4$ 에서의 검정력 $\gamma(3/4)$ 을 구하여라.

(a) $\pi_0 E_{p_0}[\phi(X)] + \pi_1 E_{p_1}[1-\phi(X)]$ Let $p_0 = \theta_0$ and $p_1 = \theta_1$

$$= \pi_0 \int \phi(x)\cdot pdf(x;\theta_0)dx + \pi_1 \int (1-\phi(x))\cdot pdf(x;\theta_1)dx$$

$$= \pi_0 \int \phi(x)\cdot pdf(x;\theta_0)dx + \pi_1 - \pi_1 \int \phi(x)\cdot pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0)\cdot pdf(x;\theta_0)dx$$

$$- \pi_1 E_{\theta_1}[\phi(x)\cdot I(pdf(x;\theta_0)=0)]$$

$$= E_{\theta_0}\left[\pi_0\phi(x)\left\{1 - \frac{\pi_1}{\pi_0}\frac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)}\right\}\right] + \pi_1 - \pi_1 E_{\theta_1}[\phi(x)\cdot I(pdf(x;\theta_0)=0)]$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 1 - \dfrac{\pi_1}{\pi_0}\dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} < 0 \\ \gamma & \text{if} \quad 1 - \dfrac{\pi_1}{\pi_0}\dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} = 0 \\ 0 & \text{if} \quad 1 - \dfrac{\pi_1}{\pi_0}\dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} > 0 \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} \ge C+1 \\ \gamma & \text{if} \quad \dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} = C \\ 0 & \text{if} \quad \dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} \le C-1 \end{cases}$$

(b) $P_{\theta_0}[\phi(x)] \le \alpha \Leftrightarrow P\left(\dfrac{\pi_1}{\pi_0}\dfrac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} \le 0\right) \le 0.05$

$$pdf(x;\theta_0) = \prod_{i=1}^{8} p_0^{x_i}(1-p_0)^{1-x_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$pdf(x;\theta_1) = \prod_{i=1}^{8} p_1^{x_i}(1-p_1)^{1-x_i} = \prod_{i=1}^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_i}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x_i} = \prod_{i=1}^{8} 3^{x_i}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3^{\sum x_i}\left(\frac{1}{4}\right)^8$$

$$\therefore\ pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0) = 3^{\sum x_i}\,2^8$$

Under $H_0 : p = \frac{1}{2}$, $\sum X_i \sim B(n=8, 1/2)$

$$P(\sum X_i > c) + \gamma P(\sum X_i = c) = 0.05$$

$$P(\sum X_i \ge 7) + \gamma P(\sum X_i = 6) = 0.0352 + \gamma\cdot 0.1093 = 0.05$$

$$\therefore \gamma = (0.05 - 0.0352) \div 0.1093$$

$$\approx 0.1358 \quad \checkmark\checkmark$$

$\therefore$ 최강력 검정 :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \sum X_i \ge 7 \\ 0.1358 & \text{if} \quad \sum X_i = 6 \quad \checkmark\checkmark \\ 0 & \text{if} \quad \sum X_i \le 5 \end{cases}$$

(c) $\gamma(\theta) = E_\theta[\phi(X)]$

$$= P_{\theta=3/4}(\sum X_i \ge 7) + \gamma\cdot P_{\theta=3/4}(\sum X_i = 6) =$$

$$= (0.1001129 + 0.2669678) + 0.1358\cdot 0.3114624\ldots$$

$$= 0.4093773 \quad \checkmark\checkmark$$

9.2. 분산행렬 Σ가 알려진 정칙행렬인 다변량 정규분포 $N_p(\mu, \Sigma)$ 에서의 랜덤표본 $X_1, \cdots, X_n$ 을 이용하여 다음 가설을 검정하려고 한다.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \ (\mu_0, \mu_1 \text{는 주어진 벡터이고 } \mu_0 \ne \mu_1)$$

(a) 다음의 베이지안 평균오류확률을 최소로 하는 베이즈검정 ϕ^{π} 을 구하여라.

$$\pi_0 E_{\mu_0}[\phi(x)] + \pi_1 E_{\mu_1}[1-\phi(x)],\ (\pi_0 + \pi_1 = 1,\ \pi_0 > 0,\ \pi_1 > 0)$$

(b) 위의 가설을 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검정하려고 할 때 최강력 검정을 구하여라.

(a)

$$pdf(x;\theta) = |\det(2\pi\Sigma)|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

$$\prod_{i=1}^{n} pdf(x;\theta_0) = |\det(2\pi\Sigma)|^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^t\Sigma^{-1}(x_i-\mu)\right\}$$

$$\therefore\ pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^t\Sigma^{-1}(x_i-\mu_1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(x_i-\mu_0)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_1)^t\Sigma^{-1}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i-\bar{x})\Sigma^{-1}(x_i-\bar{x}) - \frac{1}{2}(\bar{x}-\mu_1)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^t\Sigma^{-1}(x_i-\bar{x}) + \frac{1}{2}(\bar{x}-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\bar{x}^t\Sigma^{-1}\bar{x} - 2\mu_1^t\Sigma^{-1}\bar{x} + \mu_1^t\Sigma^{-1}\mu_1 - \bar{x}^t\Sigma^{-1}\bar{x} + 2\mu_0^t\Sigma^{-1}\bar{x} - \mu_0^t\Sigma^{-1}\mu_0\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\mu_1^t\Sigma^{-1}\bar{x} - \mu_1^t\Sigma^{-1}\mu_1/2 - \mu_0^t\Sigma^{-1}\bar{x} + \mu_0^t\Sigma^{-1}\mu_0/2\right\}$$

$$= \exp\left\{(\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) + (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}\mu_0 + \mu_1^t\Sigma^{-1}\mu_1/2 + \mu_0^t\Sigma^{-1}\mu_0/2\right\}$$

$$= \exp\left\{(\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) + \mu_1^t\Sigma^{-1}\mu_0 + \mu_1^t\Sigma^{-1}\mu_1/2 - \mu_0^t\Sigma^{-1}\mu_0/2\right\}$$

$$= \exp\left\{(\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) + (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0)\right\}$$

$$\therefore\ \phi(x)\begin{cases} 1 & \text{if} \quad (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) + (\mu_1-\mu_0)\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0) \ge \log(\pi_0/\pi_1) \\ 0 & \text{if} \quad (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) + (\mu_1-\mu_0)\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0) < \log(\pi_0/\pi_1) \end{cases}$$

(b)

$$\phi(x) : \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) \ge C \\ 0 & \text{if} \quad (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) < C \end{cases}$$

$\Sigma^{-1/2}(X-\mu) \sim N(0, I_n)$

$\Sigma^{-1/2}(\bar{X}-\mu) \sim N(0, I_n/n)$

$(\mu_1-\mu_0)\Sigma^{-1}(\bar{X}-\mu) \sim (0, (\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0)/n)$

$\therefore c = 1.645\sqrt{(\mu_1-\mu_0)^t\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0)/n}$

9.3. 정규분포 $N(0,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$ 에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여 가설

$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ vs. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ (σ_0^2은 주어진 양수)

을 검정할 때 유의수준 $\alpha\ (0<\alpha<1)$의 전면최강력 검정을 구하여라.

Consider $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2=\sigma_1^2$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad \theta=(0,\sigma^2)$$

$$\frac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)} = \frac{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{\sigma_1^2}\right\}}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{\sigma_0^2}\right\}} = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{\sigma_1^2}-\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2\left(\frac{\sigma_0^2-\sigma_1^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_0^2}\right)\right\}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0) \ge c \\ 0 & \text{if } pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0) < c \end{cases} \Leftrightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Sigma x_i^2 \le c \\ 0 & \text{if } \Sigma x_i^2 > c \end{cases}$$ ✓✓

The test is independent of $\theta_1=\sigma_1^2$

Thus $\phi(x)$ is a UMP test for testing the hypothesis:

$H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta \ge \theta_0$

$X_i \sim N(0,\sigma_0^2) \Leftrightarrow X/\sigma_0 \sim N(0,1) \Leftrightarrow (X_i/\sigma_0)^2 \sim \chi^2(1)$

$\Leftrightarrow \Sigma(X_i/\sigma_0)^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n}{2},2\right) \overset{d}{\equiv} \chi^2(n)$

$$\therefore \phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Sigma(X_i/\sigma_0)^2 \ge z_{0.05} \\ 0 & \text{if } \Sigma(X_i/\sigma_0)^2 < z_{0.05} \end{cases}, \quad P_{\theta_0}\left(\Sigma(X_i/\sigma_0)^2 \ge z_{0.05}\right) = 0.05$$ ✓✓

$z_{0.05} = \chi^2_{\alpha}(n)$

$$\max_{\theta\le\theta_0} E_\theta[\phi^*(x)] = E_{\theta=\theta_0}[\phi^*(x)] = \alpha$$

$\therefore \phi^*$ is a UMP test for testing: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

9.4. 확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$$

로 주어지는 베타분포 Beta(θ,1), θ>0 에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여 가설

$$H_0: \theta \le \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0 \quad (\theta_0\text{는 주어진 양수})$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha\,(0<\alpha<1)$의 전역최강력 검정을 구하여라.

consider testing the hypothesis:

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta = \theta_1 \quad (\theta_0 < \theta_1)$$

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) = \exp\left\{ \log\theta + (\theta-1)\log x + \log I_{(0,1)}(x) \right\}$$

$$pdf(x;\theta_1) / pdf(x;\theta_0)$$

$$= \exp\left\{ n\log\theta_1 + (\theta_1-1)\sum_{i=1}^n \log x_i + \log I_{(0,1)}(x_{(1)}, x_{(n)}) - n\log\theta_0 - (\theta_0-1)\sum_{i=1}^n \log x_i - \log I_{(0,1)}(x_{(1)}, x_{(n)}) \right\}$$

$$= \exp\left\{ n\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + (\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^n \log x_i \right\}$$

$$\therefore \quad \phi(x) \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{i=1}^n \log x_i \ge c \\ 0 & \text{if } \sum_{i=1}^n \log x_i < c \end{cases}$$

$\phi(x)$ is independent of θ_1 $\therefore$ $\phi(x)$ is a UMP test for testing:

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0$$

$$F(x \le x) = x^\theta \;\Rightarrow\; F(-\log X \le x) = 1 - F(\log X \le -x) = 1 - F(X \le e^{-x}) = 1 - e^{-x\theta}$$

$$\therefore f(-\log X \le x) = \theta \exp\{-\theta x\}$$

$$\therefore -\log X \sim Exp(1/\theta) \Leftrightarrow -\theta \log X \sim Exp(1) \overset{d}{\equiv} Gamma(1,1)$$

$$\Leftrightarrow -2\theta \sum_{i=1}^n \log X_i \sim \chi^2(2n) \;\checkmark\checkmark$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } -2\theta_0 \sum_{i=1}^n \log x_i \le c \\ 0 & \text{if } -2\theta_0 \sum_{i=1}^n \log x_i > c \end{cases} \Leftrightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } -2\theta_0 \sum_1^n \log x_i \le \chi^2_\alpha(2n) \;\checkmark\checkmark \\ 1 & \text{if } -2\theta_0 \sum_1^n \log x_i > \chi^2_\alpha(2n) \;\checkmark\checkmark \end{cases}$$

$$E_{\theta_0}[\phi(x)] = \alpha, \quad E_{\theta \le \theta_0}[\phi(x)] \le E_{\theta_0}[\phi(x)] = \alpha$$

$\therefore$ $\phi(x)$ is a UMP Test for testing:

$H_0: \theta \le \theta_0$ vs $\theta > \theta_0$

[Textbook Approach]

확률밀도함수는 $f(x;\theta) = \exp\{(\theta-1)\log x + \log\theta\}$, $0<x<1$

로 나타내어지는 단일모수 지수족의 경우이므로 <정리 9.2.1>로부터 가설

$$H_0: \theta \le \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0$$

에 대한 유의수준 α의 전역최강력검정은 다음 조건에 의해 정해진다.

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n \log x_i \ge c \\ 0, & \sum_{i=1}^n \log x_i < c \end{cases}, \quad E_{\theta_0}[\phi^*(x)] = \alpha$$

※ $X_i \overset{iid}{\sim} U(0,1)$, 즉 $-\log X_i{}^\theta = -\theta \log X_i \sim Exp(1)$ $(i=1,\cdots,n)$

9.5. 확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{-\theta-1} I_{(1,\infty)}(x)$$

로 주어지는 파레토분포 Pareto(1,θ), θ>0 에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여 가설

$$H_0: \theta \ge \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta < \theta_0 \quad (\theta_0\text{는 주어진 양수})$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha\,(0<\alpha<1)$의 전역최강력 검정을 구하여라.

$$f(x;\theta) = \exp\left\{ \log\theta - (\theta+1)\log x \right\} I_{(1,\infty)}(x)$$

$$pdf(x;\theta_1) / pdf(x;\theta_0) = \exp\left\{ \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) - (\theta_1-\theta_0)\sum \log x_i \right\} \ge c$$

$$\therefore \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & -\sum \log x_i \le c \\ 0, & -\sum \log x_i > c \end{cases} \qquad \because (\theta_1-\theta_0) < 0$$

$$f(x;\theta) = \theta x^{-\theta-1}, \quad F_X(x) = P(X<x) = \left[-x^{-\theta}\right]_1^x = 1 - x^{-\theta}$$

$$\therefore P(\log X_i < x) = P(X < e^x) = 1 - e^{-\theta x}$$

$$\therefore P(\log X = x) = \theta e^{-\theta x} \sim Exp(\theta^{-1})$$

$$\therefore \theta \log X \sim Exp(1) \overset{d}{\equiv} Gamma(1,1) \;\checkmark\checkmark$$

$$\therefore 2\theta \sum_1^n \log X_i \sim Gamma(n,2) \overset{d}{\equiv} \chi^2(2n) \;\checkmark\checkmark$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 2\theta_0 \sum_1^n \log x_i \ge \chi^2_\alpha(2n) \\ 0, & 2\theta_0 \sum_1^n \log x_i < \chi^2_\alpha(2n) \end{cases} \;\checkmark\checkmark$$

* $F_X(x) = 1 - x^{-\theta} \sim U(0,1)$

$-\log(1-(1-x^{-\theta})) \overset{d}{\equiv} -\log(1-U) \sim Exp(1)$

$\therefore -(-\theta)\log(X) = \theta \log X \sim Exp(1) \equiv Gamma(1,1)$

$2\theta \sum_1^n \log x_i \sim Gamma(n,2) \overset{d}{\equiv} \chi^2(2n)$

☆ 9.6. 지수분포 $Exp(\theta)$, $0<\theta<+\infty$ 에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$ 을 이용하여

$$H_0:\theta=\theta_0 \quad vs \quad H_1:\theta\neq\theta_0 \quad (\theta_0\text{는 주어진 양수})$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha\,(0<\alpha<1)$의 전역최강력 검정이 존재하지 않음을 밝혀라.

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}=\exp\left\{-\log\theta-\frac{x}{\theta}\right\}I_{(0,\infty)}(x)$$

Consider testing the hypothesis: $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta=\theta_1$

$$pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0)=\exp\left\{-n\log\theta_1-\frac{1}{\theta_1}\Sigma x_i+n\log\theta_0+\frac{1}{\theta_0}\Sigma x_i\right\}\geq c$$

$$=\exp\left\{-n\log\frac{\theta_1}{\theta_0}+\frac{\theta_1-\theta_0}{\theta_1\theta_0}\Sigma x_i\right\}\geq c$$

if $\theta_1-\theta_0>0$

$$\text{UMP test}:\ \phi(x)\begin{cases}1, & \Sigma x_i\geq C\\ 0, & \Sigma x_i<C\end{cases}$$

if $\theta_1-\theta_0<0$

$$\text{UMP test}:\ \phi(x)\begin{cases}1, & \Sigma x_i\leq C\\ 0, & \Sigma x_i>C\end{cases}$$

no such C exists. Thus, a UMP test does not exist.

9.7. 확률밀도함수

$$f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}\exp\{-x^\theta\}I_{(0,+\infty)}(x)$$

인 와이블분포 $Weibull(\theta,1)$ 에서의 랜덤표본을 $X_1,\cdots,X_n$ 을 이용하여 가설

$$H_0:\theta=1 \quad vs \quad H_1:\theta>1$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha\,(0<\alpha<1)$의 전역최강력 검정이 존재하지 않음을 밝혀라.

Consider testing the hypothesis: $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta=\theta_1$

$$f(x;\theta)=\exp\{\log x+(\theta-1)\log x-x^\theta\}I_{(0,+\infty)}(x)$$

$$pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0)=\exp\left\{(\theta_1-\theta_0)\Sigma\log x_i-\Sigma x_i^{\theta_1}+\Sigma x_i^{\theta_0}\right\}\geq c$$

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\left[-\exp\{-x^\theta\}\right]_0^x=1-\exp\{-x^\theta\}$$

$$P(x^\theta<x)=1-\exp\{-x\}$$

$$\therefore P(x^\theta=x)=\exp\{-x\} \quad \therefore X^\theta\sim Exp(1)\Rightarrow 2\Sigma X_i^\theta\sim Gamma(n,2)\overset{d}{=}\chi^2(2n)$$

under $H_0:\theta=1$, $pdf(x;\theta_1)/pdf(x;\theta_0)=\exp\left\{(\theta_1-1)\Sigma\log x_i-\Sigma x_i^{\theta_1}+\Sigma x_i\right\}\geq c$

$$(\theta_1-1)\Sigma\log x_i-\Sigma x_i^{\theta_1}+\Sigma x_i\geq c$$

$$\phi^*(x)=\begin{cases}1, & (\theta_1-1)\sum_{i=1}^n\log x_i-\sum_{i=1}^n x_i^{\theta_1}+\sum_{i=1}^n x_i>c\\ 0, & (\theta_1-1)\sum_{i=1}^n\log x_i-\sum_{i=1}^n x_i^{\theta_1}+\sum_{i=1}^n x_i<c\end{cases}$$

이러한 기각역의 형태는 θ_1에 따라 다르게 주어지므로 전역최강력 검정은 존재하지 않는다.

☆ 9.8. 지수분포 $Exp(\theta)$, $0<\theta<+\infty$ 에서의 랜덤표본 $X=(X_1,\cdots,X_n)^t$ 을 이용하여 가설

$$H_0:\theta=\theta_0 \quad vs \quad H_1:\theta\neq\theta_0 \quad (\theta_0\text{는 주어진 양수})$$

을 유의수준 $\alpha\,(0<\alpha<1)$에서 검정할 때 두 조건

$$E_{\theta_0}[\phi(x)]=\alpha,\quad \left[\frac{d}{d\theta}E_\theta[\phi(x)]\right]_{\theta=\theta_0}=0$$

을 만족시키는 검정 중에서 최강검정력 검정을 구하여라.

$$\phi^{**}(x)=\begin{cases}1, & P_{\theta_1}(x)/P_{\theta_0}(x)\geq K_1+K_2\dot{P}_{\theta_0}(x)/P_{\theta_0}(x)\\ 0, & P_{\theta_1}(x)/P_{\theta_0}(x)<K_1+K_2\dot{P}_{\theta_0}(x)/P_{\theta_0}(x)\end{cases}$$

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}=\exp\left\{-\log\theta-\frac{x}{\theta}\right\}$$

$$P_\theta(x)=\exp\left\{-n\log\theta-\frac{1}{\theta}\Sigma x_i\right\}=\frac{\eta}{\theta}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\Sigma x_i\right\}$$

$$\therefore P_{\theta_1}(x)/P_{\theta_0}(x)=\exp\left\{-n\log\frac{\theta_1}{\theta_0}-\Sigma x_i\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0}\right)\right\}=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\exp\left\{-\Sigma x_i\cdot\left(\frac{\theta_0-\theta_1}{\theta_0\theta_1}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\exp\left\{\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{\theta_1\theta_0}\right)\Sigma x_i\right\}\geq c$$

if $\theta_1>\theta_0$

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \Sigma x_i>C\\ 0, & \Sigma x_i<C\end{cases}$$

if $\theta_1<\theta_0$

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \Sigma x_i<C\\ 0, & \Sigma x_i>C\end{cases}$$

$$\dot{P}_\theta(x)=\frac{d}{d\theta}P_\theta(x)=-\frac{\eta}{\theta^2}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\Sigma x_i\right\}+\frac{\eta}{\theta^3}\Sigma x_i\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\Sigma x_i\right\}$$

$$\dot{P}_\theta(x)/P_\theta(x)=-\frac{n}{\theta}+\theta^{-2}\Sigma x_i=\theta^{-2}n(\bar{x}-\theta)$$

$$X\sim Exp(\theta),\ X/\theta\sim Exp(1)\Leftrightarrow \Sigma x_i/\theta\sim Gamma(n,1)$$

$$\Leftrightarrow 2\theta^{-1}\Sigma x_i\sim Gamma(n,2)\overset{d}{=}\chi^2(2n)$$

위의 (최강력검정) 부등식의 풀이로부터 검정 ϕ^*의 기각역이 다음 세 가지 중 하나인 것을 알 수 있다.

"$\sum_{i=1}^n x_i\leq a$", "$\sum_{i=1}^n x_i\geq b$", "$\sum_{i=1}^n x_i\leq a$ 또는 $\sum_{i=1}^n x_i\geq b$"

그러나 이들 중 기각역의 형태가 한쪽 검정의 형태인 경우에는 <정리 9.2.1>의 증명과정에서 밝혔듯이 그러한 한쪽 검정의 검정력 함수는 증가함수이거나 감소함수가 되어 주어진 조건

$$\left[\frac{d}{d\theta}E_\theta\phi^*(x)\right]_{\theta=\theta_0}=0$$

을 만족시킬 수 없다. 따라서 기각역의 형태가 다음과 같이 양쪽인 경우만 고려하면 된다.

$$\left[\frac{d}{d\theta}E_\theta[\phi(x)]\right]_{\theta=\theta_0}=E_{\theta_0}\left[\phi(x)\cdot\dot{p}(\theta;x)/p(\theta;x)\right]=E_{\theta_0}\left[\phi(x)\cdot n(\bar{x}-\theta)\right]=0$$

$$=E_{\theta_0}\left[2\theta^{-1}\phi(x)n(\bar{x}-\theta)\right]=0$$

$$2\theta^{-1}\Sigma x_i\sim\chi^2(2n)\Leftrightarrow 2\theta^{-1}n\bar{x}\sim\chi^2(2n) \qquad =E_{\theta_0}\left[\phi(x)2\theta^{-1}n\bar{x}\right]=2\theta^{-1}n\theta$$

채택역 : $C_1\leq 2n\bar{x}\theta_0^{-1}\leq C_2$

$$=E_{\theta_0}[\phi(x)\{2\theta^{-1}n\bar{x}\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\cdot x\cdot pdf_{\chi^2(2n)}(x)\,dx=\int_{C_1}^{C_2}x\,pdf_{\chi^2(2n)}(x)\,dx=2n$$

$$=\int_{C_1}^{C_2}(x/2n-1)\,pdf_{\chi^2(2n)}(x)\,dx=0$$

$$E_{\theta_0}[\phi(X)] = \int_{c_1}^{c_2} pdf_{\chi^2_{(2n)}}(x)\,dx = 1-\alpha$$

$$\therefore\ \phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } 2n\bar{x}\theta_0^{-1} \le c_1 \text{ or } 2n\bar{x}\theta_0^{-1} \ge c_2 \\ 0 & \text{if } c_1 \le 2n\bar{x}\theta_0^{-1} \le c_2 \end{cases}$$

$\phi(X)$ is a UMP test for $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$
and the test does not depend on θ_1. Hence it is a UMP test for
testing $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$

★ 9.9. 초기하분포 $H(n;N,D)$, $1 \le D \le N$ (n, N은 알려진 자연수)를 따르는 관측자료 X를 이용한 다음의 가설 검정에 대하여 답하여라.

(a) $H_0: D = D_0$ vs $H_1: D = D_1$ (D_0, D_1은 주어진 자연수이고 $D_0 < D_1$)을 유의수준 α ($0<\alpha<1$)에서 검정할 때, 최강력 검정이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \ge C+1 \\ \gamma, & x = C \\ 0, & x \le C-1 \end{cases} \quad (0 \le \gamma \le 1),\ E_{D_0}\phi^*(x) = \alpha$$

(b) (a)의 검정에 다음 가설에 대하여 유의수준 α ($0<\alpha<1$)의 전역최강력 검정임을 밝히고 $N=60$, $n=5$, $D_0=6$, $\alpha=0.01$ 일 때 C와 γ를 구하여라. (<예 3.1.1 참조)

$$H_0: D \le D_0 \quad \text{vs} \quad H_1: D > D_0$$

$$f(x;\theta) = \binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}\Big/\binom{N}{n} = \frac{D!}{x!(D-x)!}\cdot\frac{(N-D)!}{(n-x)!(N-D-(n-x))!}\Big/\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

(a) 이 경우에 가능도비는

$$\frac{pdf(x;D_1)}{pdf(x;D_0)} = \frac{\binom{D_1}{x}\binom{N-D_1}{n-x}\Big/\binom{N}{n}}{\binom{D_0}{x}\binom{N-D_0}{n-x}\Big/\binom{N}{n}}, \quad (D_1 > D_0)$$

로 주어지고, 이 가능도비가 x의 증가함수임을 다음을 통해 알 수 있다.

$$\frac{pdf(x+1;D_1)}{pdf(x+1;D_0)}\Big/\frac{pdf(x;D_1)}{pdf(x;D_0)} = \frac{(D_1-x)(N-D_0-n+x+1)}{(D_0-x)(N-D_1-n+x+1)} > 1$$

따라서 가설 $H_0: D = D_0$ vs $H_1: D = D_1$

에 대한 유의수준 α의 최강력검정은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \ge C+1 \\ \gamma, & x = C \\ 0, & x \le C-1 \end{cases} \quad (0 \le \gamma \le 1),\ E_{D_0}\phi^*(x) = \alpha$$

(b) $\phi^*(x)$ does not depend on the choice of $H_1: D = D_1$
Thus, it is a UMP test for testing: $H_0: D = D_0$ vs $H_1: D > D_0$

★ Also $\phi^*(x)$ is an increasing function of D because of the same argument in <Theorem 9.2.1>
Thus $\phi^*(x)$ is a UMP test for testing: $H_0: D \le D_0$ vs $H_1: D > D_1$

★ <Theorem 9.2.1> Argument.

Consider two parameters: D' and D'' ($D'' > D'$)

Let the testing hypotheses be: $H_0: D = D'$ vs $H_1: D = D''$

Let $\phi_{\alpha'}(x)$ be a randomized test that always rejects with probability α'
Let $\phi^{MP\alpha'}(x)$ be the most powerful test.

By the definition of MP tests,

$$E_{D''}[\phi^{MP\alpha'}(x)] \ge E_{D''}[\phi_{\alpha'}(x)] = \alpha' = E_{D_1}[\phi^{MP\alpha'}(x)]$$

$\therefore$ test $E_D[\phi^*(x)]$ is an increasing function of D ✓✓

$\therefore \max_{D \le D_0} E_D[\phi^*(x)] = E_{D_0}[\phi^*(x)] = \alpha$ ✓✓

$\therefore\ \phi^*(x)$ is a UMP test for testing: $H_0: \theta \le D_0$ vs $H_1: \theta > D_0$

$N = 60$ (개체수), $D_0 = 6$ (불량품수), $n = 5$ (추출수), x = (추출된 불량품수)

$P(X \ge 3) = 0.005389716$
$P(X \ge 2) = 0.073513171$
$\therefore C = 2$
$P(X \ge 3) + \gamma P(X = 2) = 0.01$
$\therefore \gamma = (0.01 - P(X \ge 3)) / P(X = 2) = 0.0676\ldots \approx 0.068$ ✓✓

9.10. 균등분포 $U[0,\theta]$, $\theta>0$ 에서의 랜덤표본을 $X=(X_1,\cdots,X_n)^t$ 이라고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta=\theta_1$ (θ_0,θ_1 은 주어진 양수이고 $\theta_1>\theta_0$)
을 유의수준 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 에서 검정할 때, 다음 조건을 만족시키는 검정이 최강력 검정임을 밝혀라.

$$\phi^*(x)=1,\quad x_{(n)}>\theta_0\ ,\quad E_{\theta_0}\phi(X)=\alpha$$

(b) $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta>\theta_0$ (θ_0 는 주어진 양수)
을 유의수준 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 에서 검정할 때, 최대가능도비 검정이 전역최강력 검정임을 밝혀라.

(a) $f(x;\theta)=\theta^{-1}I_{[0,\theta]}(x)$

$$p(x;\theta_1)\,/\,p(x;\theta_0)=\theta_1^{-n}I_{[0<x_{(1)},\,x_{(n)}<\theta_1]}\,/\,\theta_0^{-n}I_{[0<x_{(1)},\,x_{(n)}<\theta_0]}$$

(c) $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta\neq\theta_0$ (θ_0 은 주어진 양수)
을 유의수준 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 에서 검정할 때, 다음 검정 $\phi^*(x)$ 가 전역최강력 검정임을 밝혀라.

$$\phi^*(x)=\begin{cases}1, & x_{(n)}<\theta_0\sqrt[n]{\alpha} \quad \text{또는} \quad x_{(n)}>\theta_0\\ 0, & \theta_0\sqrt[n]{\alpha}\le x_{(n)}\le\theta_0\end{cases}$$

(a) 이 경우에 가능도비는 :

$$\frac{pdf(x;\theta_1)}{pdf(x;\theta_0)}=\begin{cases}(\theta_1/\theta_0)^{-n}, & x_{(n)}\le\theta_0\\ +\infty\ , & \theta_0<x_{(n)}\le\theta_1\end{cases}$$

이므로, <정리 9.1.2> 에서 $K\ge(\theta_1/\theta_0)^{-n}$ 인 경우에 대응하는 조건인

$$\phi^*(x)=1,\quad x_{(n)}>\theta_0\ ,\quad E_{\theta_0}[\phi^*(X)]=\alpha$$

을 만족시키는 검정은 유의수준 α 의 최강력 검정이다.

(b) $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta>\theta_0$

$\hat\theta^{\Omega}:\hat\theta=\max(x_{(n)},\theta_0)$ $\quad\hat\theta^{\Omega_0}:\hat\theta^{0}=\theta_0$

$$\therefore\ \lambda(l(\hat\theta^{\Omega})-l(\hat\theta^{\Omega_0}))=\begin{cases}0\ , & x_{(n)}\le\theta_0\\ +\infty\ , & x_{(n)}>\theta_0\end{cases}$$

따라서 유의수준 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 의 최대가능도비 검정

$$\phi^*(x)=1\ ,\ x_{(n)}>\theta_0\ ,\ E_{\theta_0}[\phi^*(X)]=\alpha$$

를 만족시키는 검정 ϕ^* 로 주어지고, (a)로 부터 이 검정은 대립가설

$$H_1(\theta_1):\theta=\theta_1\quad(\theta_1>\theta_0)$$

에서의 θ_1 에 관계없이 최강력 검정이므로 대립가설이 $H_1:\theta>\theta_0$ 인 경우에 전역최강력 검정이다.

(c) (i) 주어진 검정에 대하여

$$E_{\theta_0}[\phi^*(x)]=P_{\theta_0}(X_{(n)}<\theta_0\sqrt[n]{\alpha})=\alpha$$

가 성립하므로, (a)로부터 주어진 검정은 대립가설

$$H_1(\theta_1):\theta=\theta_1\quad(\theta_1>\theta_0)$$ 의 최강력 검정이다.

(ii) 한편 유의수준 α 인 즉

$$E_{\theta_0}\phi(x)\le\alpha$$

인 임의의 검정 ϕ 의 $H_1(\theta_2):\theta=\theta_2\ (\theta_2<\theta_0)$ 에서의 검정력에 대하여 다음이 성립한다.

$$E_{\theta_2}\phi(x)=(\theta_2^{-n}/\theta_0^{-n})\,E_{\theta_0}\phi(x)\,I(X_{(n)}\le\theta_2)$$

$$\le(\theta_2/\theta_0)^{-n}E_{\theta_0}\phi(x)$$

$$\le(\theta_2/\theta_0)^{-n}\alpha$$

$$\therefore\ E_{\theta_2}\phi(x)\le\min\{(\theta_0/\theta_2)^n\alpha,1\}=P_{\theta_2}\{X_{(n)}<\theta_0\sqrt[n]{\alpha}\}=E_{\theta_2}\phi^*(x)$$

따라서 ϕ^* 는 대립가설이

$$H_1(\theta_2):\theta=\theta_2\quad(\theta_2<\theta_0)$$

인 경우에도 유의수준 $\alpha\ (0<\alpha<1)$ 의 최강력 검정이다.

그러므로 (i), (ii)로부터 주어진 검정 ϕ^* 는 대립가설

$$H_1:\theta\neq\theta_0$$

에 대한 전역최강력 검정이다.

9.11. 1 리터당 주행거리가 15km 라고 연비가 표시되어 있는 특정 자동차의 실제 연비를 조사하여 이보다 연비가 나쁜 증거가 뚜렷하면 더욱 정밀한 검사를 하려고 한다. 이를 위해 10대의 자동차를 랜덤추출하여 1리터당 주행거리를 측정한 결과 다음의 자료를 얻었다.

12.5	14.9	10.8	16.1	14.8	15.1	13.8	15.5	13.5	14.0

이 자동차의 실제 1리터당 주행거리를 θ km 라고 하여, 검정하고자 하는 적절한 가설을 세우고 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 부호검정을 하여라.

Let $\theta_0 = 15$ and we want to test the following:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

Let $S_n = \sum_{i=1}^{n} I(X_i < \theta_0)$. $S_n = 7$

under H_0, $S_n \sim B(n=10, p(\theta)=1/2)$

$$\therefore \phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } S_n \geq c+1 \\ \gamma & \text{if } S_n = c \\ 0 & \text{if } S_n \leq c-1 \end{cases}$$

$$E_{\theta_0}[\phi^*(x)] = P(S_n \geq c+1) + \gamma P(S_n = c) = \alpha = 0.05$$

if $c=8$, $P(S_n \geq 9) + \gamma P(S_n = 8) = 0.0107 + \gamma \cdot 0.0440 = 0.05$

$$\therefore \gamma = (0.05 - 0.0107) / 0.044 \simeq 0.893$$

$$\therefore \phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } S_n \geq 9 \\ 0.893 & \text{if } S_n = 8 \\ 0 & \text{if } S_n \leq 7 \end{cases}$$ ✓✓

Accept / do not reject the null hypothesis

9.12 〈예 9.3.3〉에서와 같이 점근상대효율성을 알아볼 때, 정규분포에서 벗어나는 모형으로서 확률밀도함수가

$$f(x) = (1-\epsilon)\phi(x) + \epsilon \frac{1}{\sigma_c}\phi\left(\frac{x}{\sigma_c}\right) \quad (0<\epsilon<1, \sigma_c>0), \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

로 주어지는 오염된 (contaminated) 정규분포의 모형 $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$ 을 상정하여 점근상대효율성의 변화를 조사하기도 한다. 이와 같이 오염된 분포의 모형에서 부호검정의 t 검정에 대한 점근상대효율성 $ARE(\{S_n\}, \{T_n\})$ 의 공식을 구하고, 다음 경우에 그 값을 구하여라.

$$\sigma_c = 4, \quad \epsilon = 0.01,\ 0.05,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.25$$

부호검정의 t 검정에 대한 점근상대효율성은 다음과 같이 주어진다:

$$4f(0)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z)\,dz \qquad z/\sigma_c = t, \quad dz = \sigma_c\,dt$$

$$= 4\left\{(1-\epsilon)\phi(0) + \epsilon\frac{1}{\sigma_c}\phi\left(\frac{0}{\sigma_c}\right)\right\}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \left\{(1-\epsilon)\phi(z) + \epsilon\frac{1}{\sigma_c}\phi\left(\frac{z}{\sigma_c}\right)\right\} dz$$

$$= 4\left\{(1-\epsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\epsilon}{\sigma_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}^2 \left[(1-\epsilon)E[z^2] + \frac{\epsilon}{\sigma_c}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c^2 t^2 \phi(t)\cdot\sigma_c\,dt\right]$$

$$= 4\left\{(1-\epsilon+\frac{\epsilon}{\sigma_c})\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}^2 \left[(1-\epsilon)E[z^2] + \epsilon\sigma_c^2 E[z^2]\right]$$

$$= 4\left\{(1-\epsilon+\frac{\epsilon}{\sigma_c})\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}^2 \left[(1-\epsilon+\epsilon\sigma_c^2)E[z^2]\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-\epsilon+\frac{\epsilon}{\sigma_c})^2(1-\epsilon+\epsilon\sigma_c^2)$$ ✓✓

ϵ	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25
$ARE(\{S_n\},\{T_n\})$	0.7212	1.0320	1.3618	1.8398	1.9963

✓✓

9.13. 건강한 사람들의 심장지수 (Cardiac Arrest)는 평균 3.50 (litres/min m^2) 임이 알려져 있다. 심장질환의 경험이 있는 사람들의 심장지수가 이보다 떨어지는지를 알아보기 위하여 20명의 심장질환 경험자에 대하여 조사한 결과 다음의 자료를 얻었다.

2.45	3.55	4.05	0.95	1.90	3.48	3.80	1.40	3.65	3.30
2.33	2.91	3.69	1.83	1.35	4.10	2.77	2.60	3.32	2.34

심장질환 경험자의 실제 심장지수를 θ (liters/min m^2) 라고 하여, 검정하고자 하는 적절한 가설을 세우고 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 부호순위 검정을 하여라.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} I(X_i - \theta_0) R(|X_i - \theta_0|) = 35 \times 36$$

$$\phi_{SR}(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} 1, & W_n^+ \leq C^+ - 1 \\ \gamma, & W_n^+ = C^+ \\ 0 & W_n^+ \geq C^+ + 1 \end{cases}$$

R : pSignrank(60, 20) = 0.0486536
pSignrank(61, 20) = 0.0526909

$$\therefore \phi_{SR}(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} 1, & W_n^+ \leq 60 \\ \gamma, & W_n^+ = 61 \\ 0, & W_n^+ \geq 62 \end{cases}$$

$$0.0486536 + \gamma(0.0526909 - 0.0486536) = 0.05$$

$$\therefore \gamma = 0.333$$

$P(W_n^+ \leq 36) = 0.00415$ Thus, reject H_0

9.14. 연습문제 (9.13) 에서 유의수준 $\alpha = 0.05$ 의 부호검정을 하여라.

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 = 3.5 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq \theta_0) = 14$$

$S_n \sim B(n=20, p(\theta)=\frac{1}{2})$ $\quad \phi_S(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } S_n \geq C+1 \\ \gamma & \text{if } S_n = C \\ 0 & \text{if } S_n \leq C-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \phi_S(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } S_n \geq 15 \\ \gamma & \text{if } S_n = 14 \\ 0 & \text{if } S_n \leq 13 \end{cases}$$

$\gamma = (0.05 - 0.020694973) / (0.036944942)$

$\simeq 0.793$

$$\therefore \phi_S(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } S_n \geq 15 \\ 0.793 & \text{if } S_n = 14 \\ 0 & \text{if } S_n \leq 13 \end{cases}$$

$S_n = 14$. Thus, reject with probability 0.7919 ✓✓

9.15 연습문제 (9.12) 에서와 같이 오염된 정규분포의 오형을 상정하는 경우에 부호순위 검정의 t 검정에 대한 점근상대효율성 $ARE(\{W_n\}, \{T_n\})$ 의 공식을 구하고, 다음 경우에 그 값을 구하여라.

$$\sigma_c = 4, \quad \epsilon = 0.01, 0.05, 0.10, 0.20, 0.25$$

부호순위 검정의 t 검정에 대한 점근상대효율성은 :

$$ARE(\{W_n\}, \{T_n\}) = 12 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(z) dz \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz$$

$f(x) = (1-\epsilon)\phi(x) + \epsilon \frac{1}{\sigma_c} \phi\left(\frac{x}{\sigma_c}\right)$ $(0 < \epsilon < 1, \sigma_c > 0)$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \left\{ (1-\epsilon)\phi(z) + \epsilon \frac{1}{\sigma_c} \phi\left(\frac{z}{\sigma_c}\right) \right\} dz$$

$$= (1-\epsilon) E[z^2] + \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_c t)^2 \cdot \epsilon \frac{1}{\sigma_c} \phi(t) \, \sigma_c \cdot dt \quad (z = \sigma_c t)$$

$$= (1-\epsilon) E[z^2] + \epsilon \sigma_c^2 E[t^2]$$

$$= (1 - \epsilon + \epsilon \sigma_c^2) E[z^2]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-\epsilon)\phi(z) + \epsilon \frac{1}{\sigma_c} \phi\left(\frac{z}{\sigma_c}\right) \right]^2 dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (1-\epsilon)^2 \phi^2(z) + 2(1-\epsilon)(\epsilon) \cdot \frac{1}{\sigma_c} \phi(z) \cdot \phi\left(\frac{z}{\sigma_c}\right) + \left(\frac{\epsilon}{\sigma_c}\right)^2 \phi\left(\frac{z}{\sigma_c}\right)^2 dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \frac{(1-\epsilon)^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\epsilon^2}{2\sigma_c \sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{\sigma_c \sqrt{1+\sigma_c^{-2}}}$$

$$\therefore ARE(\{W_n\}, \{T_n\}) = 12 \left(\frac{(1-\epsilon)^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\epsilon^2}{2\sigma_c \sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{\sigma_c \sqrt{1+\sigma_c^{-2}}} \right)^2 ((1-\epsilon) + \epsilon \sigma_c^2)$$

이로부터 $\sigma_c = 4$ 일 때, 각 ϵ 에 대한 ARE는 다음과 같다.

ϵ	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25
$ARE(\{W_n\}, \{T_n\})$	1.0696	1.4632	1.8246	2.2049	2.2657